La matematica del clima

- E’ un settore in evoluzione
- Utilizza strumenti complessi e concetti profondi
- Ha contribuito alla nascita di alcune tra le idee più importanti e originali del Novecento

La matematica del clima

Concetti fondamentali

- Variabilità
- Modelli
- Previsioni

Variabilità e osservazioni

- Nella scuola di base, lo studio del clima offre opportunità per introdurre il concetto di funzione attraverso la rappresentazione grafica
  - Istogrammi
  - Grafici cartesiani
  - …

Opportunità didattiche

- Per la matematica:
  - concetto di variabile, funzione, rappresentazione grafica
- Per la fisica
  - Misura, temperatura, pressione, umidità relativa
- Per le scienze naturali
  - Ambiente e clima,….

Lo studio del clima è collegato a concetti importanti e delicati della matematica e delle scienze sperimentali, che possono così essere affrontati in un <u>contesto significativo</u>, l’unico che può favorire un apprendimento efficace

Oltre la fase osservativa iniziano le difficoltà

Un’analisi degli strumenti matematici utilizzati dalla meteorologia e dalla climatologia contemporanee ci porta necessariamente verso tematiche difficili e complesse e di fatto inaccessibili ad uno studente di scuola secondaria. Cercheremo di evidenziare alcune idee fondamentali, affrontandole dal punto di vista storico o semplificandole al massimo.

Cercheremo di capire quali contributi meteorologia e climatologia abbiano dato

Oltre l’osservazione: il modello matematico

Che cos’è un modello matematico:

Una definizione di Vito Volterra, a proposito della dinamica delle popolazioni, un argomento che ha aspetti in comune con la meteorologia

V. Volterra
"Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi" 1927

Per poter trattare la questione matematicamente conviene partire da ipotesi che, pure allontanandosi dalla realtà, ne diano un'immagine approssimata…

Ecco come può impostarsi la questione: cerchiamo di esprimere con parole come procede all'ingrosso il fenomeno; quindi traduciamo le parole in linguaggio matematico. Questa traduzione conduce ad equazioni differenziali. Se allora ci lasciamo guidare dai metodi dell'analisi siamo condotti molto più lontani di quanto potrebbero portarci il linguaggio e il ragionamento ordinario e possiamo formulare delle leggi precise matematiche

problemi nella modellizzazione

La definizione del modello matematico: a partire dai dati osservati nel passato, è necessario determinare una o più equazioni (cioè leggi matematiche) che si adattino, o approssimino quanto meglio possibile, i dati osservati

Questo presenta già un problema: dato un insieme finito di dati, sono possibili diverse leggi in grado di spiegare il fenomeno

problemi nella modellizzazione

Un esempio molto semplice:

A un concorso fu posto il seguente quesito: data la sequenza 1, 16 , 81, 256,.. scrivere il quinto termine. Molti candidati risposero 625, che era il risultato ufficiale, ma un candidato, individuata la contorta legge $5(2n^3 - 7n^2 + 10n) - 24$ *rispose 601.*

Chi aveva ragione?

Le scelte nei modelli per la meteorologia

- Un modello meteorologico attinge da tanti settori della scienza che nel frattempo sono stati sviluppati:
- l'aria è un fluido e la sua dinamica è descritta dalle equazioni di Navier-Stokes (Dinamica atmosferica)
- il vapore acqueo iniettato in atmosfera si trasforma in nubi che possono precipitare o evaporare (Microfisica delle nubi)
- nell'atmosfera ci sono tante particelle solide che svolgono ruoli fondamentali (Aerosol atmosferico)
- lo strato limite planetario e particolarmente turbolento e necessita particolari attenzioni e parametrizzazioni
- il motore di tutto questo è il Sole che irradia verso la terra la sua energia (Trasferimento radiativo).

Le **equazioni di Navier-Stokes**

Per fluidi incomprimibili descrivono il moto di un fluido a densità costante avente velocità ***v*** e sottoposto all'azione di forze esterne **f**.

Queste equazione devono il loro nome a Claude-Louis Navier e George Gabriel Stokes. Detto v il coefficiente di viscosità cinematica, *P* la pressione, e intendendo per ρ la densità del fluido, si ha

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla}}{\rho}P + \nu\nabla^2\vec{v} + \vec{f}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

Le **equazioni di Navier-Stokes**

- La prima equazione esprime la variazione totale nel tempo del campo di velocità per unità di volume, ed è la seconda equazione della dinamica scritta per i fluidi.La seconda equazione esprime la conservazione della massa nel fluido.
- A queste equazioni vanno aggiunte le condizioni iniziali ed al bordo, come ad esempio il fatto che al bordo se è presente una parete solida le velocità del fluido sono nulle.

Se le equazioni fossero integrabili

Per certi sistemi semplici, come un pendolo, le equazioni del moto possono possedere una soluzione in forma chiusa, che è una formula che esprime **qualunque stato futuro** solo **in base allo stato iniziale** e **all'istante finale**, senza bisogno di passare per gli stati intermedi…
Date le equazioni del moto dei pianeti e della luna, nonché le posizioni e le velocità della terra e della luna si possono, ad esempio, prevedere le eclissi con anni di anticipo.

La realizzazione effettiva della frase di Pierre Simon de Laplace

…Un'intelligenza che, a un istante dato, potesse conoscere tutte le forze da cui la natura è animata, e la situazione rispettiva degli esseri che la compongono, e che inoltre fosse abbastanza grande da sottomettere questi dati all'analisi, abbraccerebbe nella stessa formula i movimenti dei grandi corpi dell'universo e quelli dell'atomo più leggero: nulla le risulterebbe incerto, il futuro come il passato sarebbe presente ai suoi occhi. Lo spirito umano offre, nella perfezione che ha saputo dare all'astronomia, una debole parvenza di questa intelligenza.

Saggio filosofico sulle probabilità

Nella maggior parte dei casi le equazioni non sono integrabili

I successi ottenuti agli inizi della fisica nel trovare soluzioni in forma chiusa per svariati sistemi semplici fecero nascere la speranza che soluzioni di questo tipo esistessero per qualunque sistema meccanico.

Oggi si sa che purtroppo in generale non è vero.

Nella maggior parte dei casi le equazioni non sono integrabili

Le leggi che descrivono l'evoluzione dell'atmosfera sono quelle classiche della meccanica e della termodinamica e la loro formulazione generale è nota da più di due secoli.

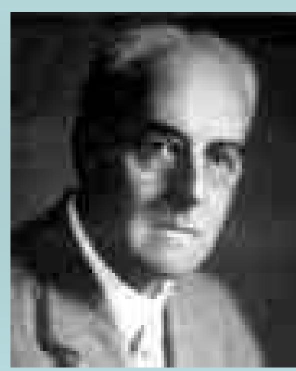
Purtroppo, a causa della complessità dei fenomeni atmosferici, sono leggi molto complesse, ed espresse pertanto da equazioni di difficile risoluzione.

L’idea di Lewis Fry Richardson

Se le equazioni differenziali della meteorologia non sono integrabili in forma chiusa, possono essere integrate numericamente

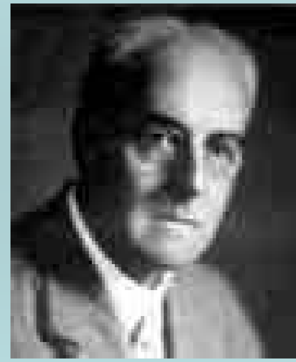
Un precursore della moderna meteorologia: Lewis Fry Richardson

L'idea di sviluppare un modello matematico in grado di predire le condizioni meteorologiche future, basandosi sulle osservazioni del passato, risale a L.F. Richardson. Richardson, impegnato al fronte come barelliere durante la Prima Guerra Mondiale, analizzò tutti i dati meteorologici disponibili a partire dalle 7 a.m. del 20/05/1910. Dopo sei mesi di lavoro, egli produsse le prime previsioni (forecast) per un'area di pochi chilometri quadrati, aiutandosi unicamente con una sorta di pallottoliere. I risultati furono assai deludenti.



Un precursore della moderna meteorologia: Lewis Fry Richardson

Occorrerà attendere altri 25 anni per avere il primo modello matematico consistente, sviluppato da J. Charney al Massachusetts Institute of Technology, e l'aprile del 1950 per la prima integrazione numerica su un computer ENIAC.



Note biografiche su Richardson

Richardson (1881-1953), fisico inglese, è particolarmente noto per essere stato un pioniere della moderna meteorologia. Il suo interesse per le applicazioni della matematica a casi concreti e fino ad allora poco studiati nasce presto: uno dei suoi primi impieghi è con la appena nata National Peat Industries Ltd (*Industria nazionale delle teorbiere*) che ha tra i suoi scopi dichiarati quello di "studiare le torbiere e i loro vari prodotti e usi in maniera scientifica". Nel cercare di risolvere un problema relativo ai tombini di drenaggio dell'acqua piovana, Richardson sviluppa sofisticate tecniche per la risoluzione numerica approssimata di un sistema di equazioni differenziali. Questo esercizio fa nascere nello scienziato un enorme interesse per le applicazioni della matematica, interesse che avrebbe segnato la nascita della moderna meteorologia.

Note biografiche su Richardson

Difatti Richardson, lasciato l'incarico al National Peat Industries, diventa sovrintendente nell'Ufficio Meteorologico dell'Osservatorio Eskdalemuir, in una remota zona del sud della Scozia. E' in questo periodo che egli capisce che gli avvenimenti meteorologici non capitano per caso, ma sono governati dalle leggi fisiche che regolano il moto delle masse d'aria. Comincia a raccogliere enormi quantità di dati e si interessa ai modelli matematici, espressi con equazioni differenziali, che studiano i fenomeni legati al moto dei fluidi. Per risolvere, numericamente, queste equazioni Richardson applica le tecniche perfezionate al tempo del suo interesse per le torbiere.

Note biografiche su Richardson

Nel frattempo scoppia la prima guerra mondiale e lo scienziato diventa autista di ambulanze in Francia. L'incarico non gli impedisce di portare con sé tutto il materiale di dati che aveva raccolto, con l'intento di proseguire le ricerche. Cosa che puntualmente avviene. Con un impressionante lavoro di calcolo manuale, armato di carte geografiche e di un righello da 25 cm, comincia a "quadrettare" le mappe dell'Europa e a cercare di prevedere il tempo in una zona sulla base del tempo noto nelle zone vicine, usando i dati in suo possesso per verificare l'attendibilità delle previsioni a tavolino.

Note biografiche su Richardson

Questo e altro lavoro successivo porta, nel 1922, alla pubblicazione di *Weather Prediction by Numerical Process*, che può essere considerato uno dei punti di partenza della moderna meteorologia.

Nell'opera Richardson arriva a teorizzare perfino un "teatro meteorologico" dove 64.000 matematici avrebbero potuto compiere i calcoli necessari in una sorta di catena di montaggio intellettuale, per ottenere una previsione meteorologica in tempo utile.

Note biografiche su Richardson

Dopo la guerra Richardson gradualmente sposta la sua attenzione verso questioni legate alle guerre e alle relazioni internazionali, e anche qui, raccolta una grande quantità di dati, cerca di sistemarli e di modellizzarli con opportune equazioni al fine di poter fare previsioni. In particolare costruisce dei modelli che si adattano bene alle corse agli armamenti e riesce anche a valutare quali sono le variabili che influenzano più o meno profondamente questi fatti. I risultati più importanti del suo lavoro in questo campo si trovano in due opere, pubblicate postume, dai titoli *Arms and Insecurity* e *Statistics of Deadly Quarrels*. Una interessante lezione che si può apprendere dai lavori di Richardson in questo campo è quanto sia difficile estrarre attendibili informazioni quantitative dal materiale storico: è molto più facile contare inaccessibili galassie o invisibili neutrini che reperire dati su guerre che hanno toccato intere nazioni non più di cent'anni fa.

Note biografiche su Richardson

Durante questi studi Richardson si imbatte nel problema di calcolare la lunghezza delle frontiere degli stati, e qui ha l'occasione per una affascinante digressione. Lavorando con mappe geografiche a varie scale (come aveva già fatto ai tempi dell'interesse per la meteorologia), egli si accorge che il *risultato della misura dipende dalle dimensioni del regolo*: per esempio se per misurare una costa con un regolo da 10 millimetri si deve riportare 100 volte il regolo, non è affatto detto che se si usa un regolo da 1 millimetro, il numero passi da 100 a 1000, può essere molto di più. Questo risultato apparve in una pubblicazione poco conosciuta e solo per caso Benoit Mandelbrot ne venne a conoscenza. E' sostanzialmente l'idea che suggerì allo stesso Mandelbrot la teoria dei frattali.
Un personaggio davvero singolare questo Richardson nella storia della scienza moderna!!

(da http://www.batmath.it/storia/richardson/richardson.htm)

Integrazione numerica di un'equazione differenziale: alcuni esempi semplici

Un'**equazione differenziale** è, genericamente parlando, una relazione tra una funzione di una o più variabili e le sue derivate, cioè le leggi che esprimono i tassi di variazione istantanea della variabile dipendente al variare delle variabili indipendenti

Integrazione numerica di un’equazione differenziale: alcuni esempi semplici

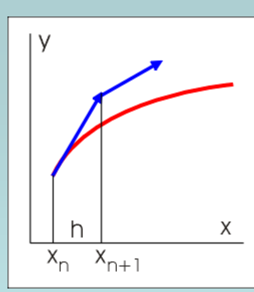
Il problema delle equazioni differenziali nasce con la formulazione della seconda legge di Newton della meccanica, cioè

F = *m***a,** dove **F** rappresenta la forza agente su una particella, *m* la massa e **a** l'accelerazione.

Infatti **l'accelerazione** è legata allo **spostamento** da una relazione **differenziale**.

Integrazione numerica: l’idea di Eulero

Suddivido l’intervallo di variabilità della variabile indipendente in tanti intervallini, nei quali suppongo che l’incremento della v. d. sia lineare e uso la derivata per valutarlo.



Integrazione numerica: l’idea di Eulero

Per vedere come si può operare possiamo ricorrere al foglio elettronico: gli esempi ci mostreranno che l’approssimazione sarà tanto migliore quanto più piccoli saranno gli intervalli: questo ci mostra già che per l’integrazione numerica è necessario disporre di strumenti di calcolo potenti. In realtà il metodo di Eulero può essere migliorato, ma nella sostanza i problemi rimangono.

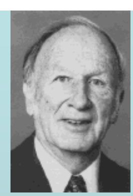
Nel caso generale quanto più mi allontano dall’istante iniziale, tanto più grossolana diventa l’approssimazione;

Possiamo usare i nostri modelli per fare previsioni a lungo termine?

Lorenz e l’effetto farfalla

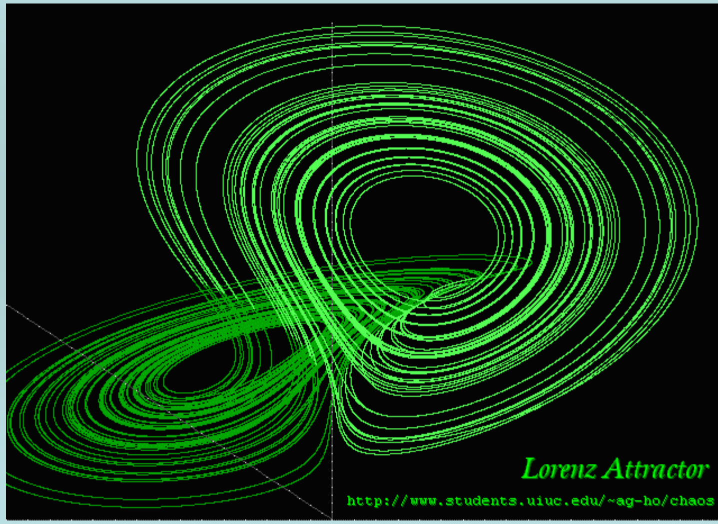
Nel 1963, il meteorologo americano Edward Lorenz pubblicò un articolo dal titolo *Deterministic Nonperiodic Flow* in cui, partendo da un modello dinamico non lineare per la descrizione dei moti convettivi nell'atmosfera, descriveva il fenomeno del caos deterministico. Le conclusioni alle quali giungeva erano simili a quelle descritte da Poincaré 60 anni prima, ma suscitarono un vasto interesse sia perché potevano essere "visualizzate" attraverso figure ottenute numericamente (grazie all'uso del computer) sia perché scaturivano dal contesto delle previsioni del tempo, un argomento al quale l'opinione pubblica è molto interessata.

Lorenz e l’effetto farfalla



Nel 1960 il meteorologo Edward Lorenz stava elaborando l’integrazione numerica al calcolatore di un sistema di equazioni differenziali che semplificano le equazioni di Navier Stokes.
Quando passò a calcolare gli andamenti dei tre parametri di stato x(t), y(t) e z(t), questi risultarono alquanto bizzarri e caratterizzati da oscillazioni molto irregolari.
Lorenz rimase colpito, e nello stesso tempo affascinato, dagli andamenti ottenuti. Per qualche oscura ragione nulla accadeva mai due volte nello stesso modo: le ripetizioni non erano mai del tutto esatte, c’erano dei modelli ricorrenti ma con disturbi. Un disordine ordinato.

Lorenz e l’effetto farfalla



Lorenz e l’effetto farfalla

La sorpresa fu ancor più grande quando si accorse che, partendo da condizioni iniziali che differivano in maniera quasi impercettibile, le corrispondenti traiettorie si allontanavano fra loro con rapidità esponenziale, per poi avvicinarsi di nuovo e poi riallontanarsi e così via. In altre parole, dopo un breve periodo iniziale in cui i comportamenti erano quasi uguali, quelli di lungo periodo risultavano completamente diversi.

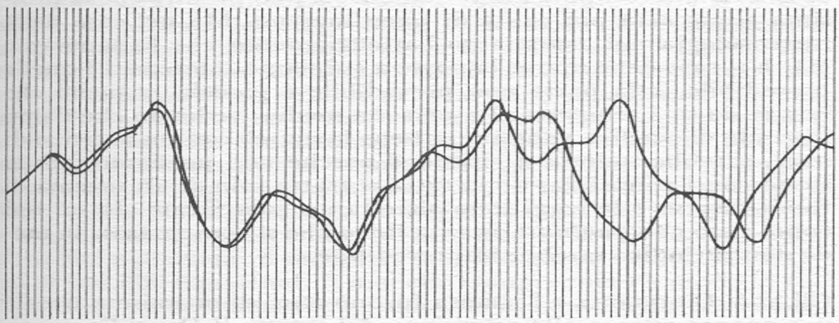
Lorenz e l’effetto farfalla

Un giorno dell’inverno del 1961, per esaminare una fase di elaborazione più lunga, Lorenz decise di far partire il processo da metà e introdusse manualmente i dati di partenza copiandoli da uno stampato precedente: dopo aver atteso il tempo necessario per lo svolgimento dei calcoli Lorenz si aspettava di ritrovare un tracciato familiare nelle prime iterazioni, un esatto duplicato del primo.

Lorenz e l’effetto farfalla

Eppure, quando osservò il nuovo tracciato vide le condizioni meteorologiche divergere così repentinamente che dopo pochi mesi simulati ogni somiglianza era scomparsa.

Lorenz e l’effetto farfalla



Come divergono due tracciati delle condizioni meteorologiche. A partire da condizioni di partenza quasi identiche, Edward Lorenz vide il suo modello del tempo meteorologico elaborato dal computer produrre due evoluzioni che si allontanavano sempre più fra loro, sino alla scomparsa di ogni somiglianza. (Da stampati di Lorenz del 1961).

Lorenz e l’effetto farfalla

Immediatamente pensò ad un guasto del computer, ma dopo accurate verifiche si rese conto che non c’era alcun errore di funzionamento: il problema stava nei numeri che aveva introdotto, con sole tre cifre decimali mentre nella memoria del computer venivano elaborati a sei cifre decimali.

Lorenz e l’effetto farfalla

Lorenz supponeva che una differenza massima di quattro decimillesimi non avesse alcuna importanza. Per un sistema che sarebbe dovuto partire da dati reali era un assunto più che ragionevole: nessun sistema meteorologico poteva fornire dati così precisi, né un satellite per la temperatura di un oceano né un anemometro per la velocità e la direzione di un vento. Un piccolo errore numerico era come un alito di vento, non avrebbe dovuto avere la minima incidenza su un sistema più vasto, eppure nel particolare sistema di Lorenz un piccolo errore si dimostrava catastrofico.

Questo fenomeno di imprevedibilità prese il nome di **effetto farfalla** o più correttamente **dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali**.

Henri Poincaré in “Science et méthode” 1908

".... .una causa piccolissima che sfugga alla nostra attenzione determina un effetto considerevole che non possiamo mancare di vedere, e allora diciamo che l'effetto è dovuto al caso. Se conoscessimo esattamente le leggi della natura e la situazione dell'universo all'istante iniziale, potremmo prevedere esattamente la situazione dello stesso universo in un istante successivo. Ma se pure accadesse che le leggi naturali non avessero più alcun segreto per noi, anche in tal caso potremmo conoscere la situazione iniziale solo approssimativamente. Se questo ci permettesse di prevedere la situazione successiva con la stessa approssimazione, non ci occorrerebbe di più e dovremmo dire che il fenomeno è stato previsto. Ma non è sempre così; può accadere che piccole differenze nelle condizioni iniziali ne producano di grandissime nei fenomeni finali. Un piccolo errore nelle prime produce un errore enorme nei secondi. La previsione diviene impossibile e si ha un fenomeno fortuito."

Henri Poincaré in “Science et méthode” 1908

"Perché i meteorologi hanno tanta difficoltà a prevedere il tempo con un certo grado di esattezza? Perché i rovesci di pioggia, e le tempeste stesse, ci sembrano arrivare a caso, tanto che molte persone trovano del tutto naturale pregare per avere la pioggia o il bel tempo, mentre troverebbero ridicolo invocare un’eclisse con la preghiera? Noi vediamo che le grandi perturbazioni si producono generalmente nelle regioni in cui l’atmosfera è in equilibrio instabile. I meteorologi sono ben consapevoli che questo equilibrio è instabile, che un ciclone nascerà da qualche parte, ma dove? Non sono in grado di dirlo; un decimo di grado in più o in meno in un punto qualunque e il ciclone scoppia qui e non là, porta le sue devastazioni in contrade che sarebbero state risparmiate. Se si fosse conosciuto questo decimo di grado, si sarebbe potuto prevederlo in anticipo, ma le osservazioni non erano né abbastanza ravvicinate né abbastanza precise, ed è per questo che tutto sembra dovuto all’intervento del caso."

Per lo studio dei fenomeni a lungo termine: metodi probabilistici

Per le previsioni a lungo termine sono stati messi a punto modelli probabilistici, ognuno dei quali presenta, allo stato attuale, pregi e difetti.

Ad esempio con il metodo ENSEMBLE si calcolano le possibili evoluzioni delle variabili climatiche a partire da condizioni iniziali “vicine”

Per lo studio dei fenomeni a lungo termine: metodi probabilistici

In questo modo può essere testata la stabilità delle previsioni: se partendo da condizioni iniziali simili si ottiene un’evoluzione simile, il modello è stabile

Inoltre si possono calcolare i risultati medi di varie previsioni e utilizzare tali risultati come stima